Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET
Departamento de Matemática – DMT
Disciplina: Álgebra II
Professora: Janete de Paula Ferrareze
Acadêmico: Estevão Vinícius Candia

1) Seja $n > 1$ um número inteiro. Mostre que $\mathbb{Z}_n$ é domínio de integridade <u>se e somente se</u> n é primo.

Dem.: Seja $n > 1$ e $\mathbb{Z}_n = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \dots, \overline{n}\}$. Dessa forma, $\overline{n} = \overline{0}$.

$\Rightarrow$ Para que $\mathbb{Z}_n$ não seja um domínio de integridade, temos de determinar k_1 e k_2 pertencentes a $\mathbb{Z}_n$ tais que $k_2 \cdot k_1 = 0$ e $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Perceba que se n for um número composto, poderemos escrevê-lo como produto de dois inteiros a e b menores que n tais que $n = a \cdot b$. Tomando $k_1 = \overline{a}$ e $k_2 = \overline{b}$, temos que $k_2 \cdot k_1 = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{n} = 0$. Portanto se n é não primo, $\mathbb{Z}_n$ não é domínio de integridade, que equivale a dizer que se $\mathbb{Z}_n$ é domínio de integridade, então n é primo.

$\Leftarrow$ Suponha que n seja primo, mas $\mathbb{Z}_n$ não seja um domínio de integridade. Dessa forma estamos afirmando que existem $\overline{k_1}$ e $\overline{k_2}$ pertencentes a $\mathbb{Z}_n$ tais que $\overline{k_2} \cdot \overline{k_1} = 0$ e $\overline{k_1} \neq 0$, $\overline{k_2} \neq 0$. Como $\overline{n} = 0$ e $\overline{k_2} \cdot \overline{k_1} = 0$ temos que $\overline{k_2} \cdot \overline{k_1} = \overline{n} \dashrightarrow \overline{k_2 \cdot k_1} = \overline{n} \dashrightarrow k_1 \cdot k_2 = n$. Mas como n é primo, temos que e $k_1 = 1$ e $k_2 = n$ (ou vice-versa) que é um absurdo, uma vez que $\overline{k_2} \neq 0 \dashrightarrow \overline{k_2} \neq \overline{n} \dashrightarrow k_2 \neq n$. Assim, se n for primo, $\mathbb{Z}_n$ será um domínio de integridade.

■

2) Seja $f: A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que:

a. $Im(f)$ é subanel de B.

Dem.:

Como $f: A \to B$ é um homomorfismo, B é um anel. Definimos $Im(f) = \{b \in B;\ \exists\, a \in A$ onde $f(a) = b\}$, ou seja $Im(f) \subset B$. Sejam b_1 e b_2 dois elementos de $Im(f)$. Temos de provar que $b_1 - b_2$ e $b_1 \cdot b_2$ estão em $Im(f)$.

Note que b_1 e b_2 pertencem a $Im(f)$, logo existem a_1 e a_2 em A tais que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Então podemos concluir que $b_1 - b_2 = f(a_1) - f(a_2) = f(a_1 - a_2) \in Im(f)$ e também $b_1 \cdot b_2 = f(a_1) \cdot f(a_2) = f(a_1 \cdot a_2) \in Im(f)$. Portanto, $Im(f)$ é um subanel de B.

■

b. $Ker(f)$ é um ideal de A.

Dem.:

Como $f: A \to B$ é um homomorfismo, A é um anel e definimos $Ker(f) = \{a \in A;\ f(a) = 0\}$, então $Ker(f) \subset A$. Sejam a_1 e a_2 dois elementos de $Ker(f)$. Primeiramente provemos que $Ker(f)$ é um subanel de A. Temos de provar que $a_1 - a_2$ e $a_1 \cdot a_2$ pertencem a $Ker(f)$.

Note que $f(a_1 - a_2) = f(a_1) - f(a_2) = 0 - 0 = 0$ e $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2) = 0 \cdot 0 = 0$. Então $a_1 - a_2$ e $a_1 \cdot a_2$ estão em $Ker(f)$, logo este é um subanel de A.

Observe que para qualquer $a \in Ker(f)$ e $a' \in A$, temos que $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a') = 0 \cdot f(a') = 0$ e $f(a' \cdot a) = f(a') \cdot f(a) = f(a') \cdot 0 = 0$, deste modo $a \cdot a'$ e $a' \cdot a$ pertencem a $Ker(f)$. Portanto $Ker(f)$ é um ideal à direita e à esquerda de A e, por conseguinte, podemos afirmar que $Ker(f)$ é um ideal de A.

■

3) Seja $f: A \to B$ um epimorfismo.

a. Mostre que se A é um anel com unidade 1_A, então B é um anel com unidade $1_B = f(1_A)$.

Dem.:

Seja $b \in B$. Como f é sobrejetora, existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Observe que $b \cdot f(1_A) = f(a) \cdot f(1_A) = f(a \cdot 1_A) = f(a) = b$. Como $b \cdot f(1_A) = b$, temos que $f(1_A) = 1_B$.

■

b. Mostre que se $a \in A$ tem inverso multiplicativo, então $f(a) \in B$ também tem inverso multiplicativo, mais precisamente $[f(a)]^{-1} = f(a^{-1})$.

Dem.:

Seja $b \in B$. Como f é sobrejetora, existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Note que $b \cdot f(a^{-1}) = f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(1_A) = 1_B$. Como $b \cdot f(a^{-1}) = 1_B$, temos que $[f(a)]^{-1} = f(a^1)$.

■